



Véhicules routiers — Méthode d'essai en régime transitoire et sur boucle ouverte avec signal d'entrée pseudo-aléatoire

Road vehicles — Transient open-loop response test method with pseudo-random steering input

L'ISO (Organisation internationale de normalisation) est une fédération mondiale d'organismes nationaux de normalisation (comités membres de l'ISO). L'élaboration des Normes internationales est en général confiée aux comités techniques de l'ISO. Chaque comité membre intéressé par une étude a le droit de faire partie du comité technique créé à cet effet. Les organisations internationales, gouvernementales et non gouvernementales, en liaison avec l'ISO participent également aux travaux. L'ISO collabore étroitement avec la Commission électrotechnique internationale (CEI) en ce qui concerne la normalisation technique.

La tâche principale des comités techniques de l'ISO est d'élaborer les Normes internationales. Exceptionnellement, un comité technique peut proposer la publication d'un rapport technique de l'un des types suivants:

- type 1: lorsque, en dépit de maints efforts au sein d'un comité technique, l'accord requis ne peut être réalisé en faveur de la publication d'une Norme internationale;
- type 2: lorsque le sujet en question est encore en cours de développement technique et requiert une plus grande expérience;
- type 3: lorsqu'un comité technique a réuni des données de nature différente de celles qui sont normalement publiées comme Normes internationales (ceci pouvant comprendre des informations sur l'état de la technique, par exemple).

La publication des rapports techniques dépend directement de l'acceptation du Conseil de l'ISO. Les rapports techniques des types 1 et 2 font l'objet d'un nouvel examen trois ans au plus tard après leur publication afin de décider éventuellement de leur transformation en Normes internationales. Les rapports techniques du type 3 ne doivent pas nécessairement être révisés avant que les données fournies ne soient plus jugées valables ou utiles.

L'ISO/TR 8726 a été élaboré par le comité technique ISO/TC 22, *Véhicules routiers*.

Les raisons justifiant la décision de publier le présent document sous forme de rapport technique du type 2 sont exposées dans l'introduction.

Sommaire

	Page
0 Introduction	2
1 Objet et domaine d'application	3
2 Références	3
3 Instrumentation	3
4 Conditions d'essai	4
5 Mode opératoire	4
6 Analyse des données	4
7 Présentation des données	5
8 Interprétation des données	5
9 Bibliographie	6
Annexes	
A Présentation des données générales	7
B Traitement des données	9
C Présentation des résultats	13
D Discussion et interprétation	16
E Limites de confiance	22

0 Introduction

iTeh STANDARD PREVIEW
(standards.iteh.ai)

0.1 Raisons du rapport technique

La présente méthode d'essai est l'une des nombreuses méthodes d'essai en régime transitoire et boucle ouverte adoptées par l'ISO/TC 22. L'intention initiale était de publier chaque méthode sous la forme d'une Norme internationale distincte. Il a ensuite été décidé de les regrouper en une seule Norme internationale, l'ISO 7401, et de restreindre les modes opératoires à leurs principes de base. Il a cependant été aussi admis que certaines méthodes renfermaient, sous leur forme initiale, des informations techniques et des données complémentaires intéressantes qu'il était souhaitable de publier. Il a alors été convenu de publier ces méthodes également sous la forme de rapports techniques complémentaires de l'ISO 7401.

Le présent document est l'un de ces rapports techniques. Il complète et explicite la méthode d'essai en régime transitoire avec signal d'entrée pseudo-aléatoire. Parmi les principaux compléments à l'ISO 7401, on peut citer l'étoffement des chapitres concernant l'analyse et l'interprétation des résultats. Les conditions d'essai sont, par contre, les mêmes que celles de l'ISO 7401.

Les méthodes d'essai en régime transitoire et sur boucle ouverte décrites dans l'ISO 7401 envisagent cinq formes différentes de signal d'entrée au niveau du volant : entrée échelon, entrée sinusoïdale (une seule période), entrée pseudo-aléatoire, entrée impulsionnelle et entrée sinusoïdale continue. L'entrée pseudo-aléatoire est utilisable lorsque le véhicule est censé avoir un comportement linéaire. Elle permet de calculer sa réponse à n'importe quel type de signal d'entrée défini dans la plage des accélérations latérales utilisées pour les essais, y compris les types mentionnés ci-dessus. Il est donc recommandé de choisir cette méthode lorsqu'on a besoin d'un maximum d'informations sur une plage limitée d'accélérations latérales, par exemple dans le cas de conduite sur route normale. D'autres méthodes peuvent être plus appropriées si l'entrée est plus spécifique ou si la plage d'accélérations latérales est plus large.

0.2 Remarques générales

Voir ISO 7401.

0.3 Objectif de l'essai

L'objectif premier de l'essai est de déterminer les caractéristiques de réponse en fréquence d'un véhicule soumis à un signal d'entrée pseudo-aléatoire au niveau du volant, sur une gamme de fréquences allant du minimum possible (fonction de la vitesse du véhicule et de la largeur de la piste d'essais) au maximum réalisable. La plage normale réalisée en pratique va d'environ 0,1 Hz à environ 4,5 Hz.

Les critères importants à considérer sont

- la variation du gain avec la fréquence en fonction du signal induit dans le volant par l'accélération et la vitesse de lacet;
- la variation du déphasage avec la fréquence en fonction du signal induit dans le volant par l'accélération latérale et l'angle de lacet.

Ces critères sont déterminés sur une course théoriquement linéaire à vitesse longitudinale constante et avec une amplitude d'angle au volant donnant une accélération latérale située dans les limites de la plage linéaire de fonctionnement du véhicule.

Le couple au volant et l'angle de roulis sont des exemples d'autres types de réponse qui sont certainement importants mais n'ont pas encore été suffisamment exploités.

Il est nécessaire de mesurer

- l'angle au volant;
- l'accélération latérale;
- la vitesse de lacet;
- la vitesse longitudinale.

Il est souhaitable de mesurer

- le couple au volant;
- l'angle de roulis ou la vitesse de roulis du véhicule.

Les variables énumérées dans ce paragraphe ne prétendent pas constituer une liste exhaustive.

1 Objet et domaine d'application

Le présent Rapport technique spécifie une méthode d'essai permettant de déterminer le comportement d'un véhicule routier en régime transitoire à vitesse quasi constante et s'applique aux voitures particulières telles que définies dans l'ISO 3833. Cette méthode d'essai est reprise sous une forme simplifiée dans l'ISO 7401, qui spécifie également d'autres variantes ou méthodes complémentaires.

La manœuvre en boucle quasi ouverte utilisée dans cette méthode n'est pas représentative des conditions réelles de conduite mais est utile pour mesurer le comportement transitoire du véhicule en réponse à un signal déterministe quelconque à calculer. Il n'est donc pas nécessaire de répéter l'essai pour obtenir une réponse à un signal d'entrée différent. Tant que ce signal est quantifiable, la seule opération nécessaire est un nouveau traitement des résultats. La répétabilité est suffisante si l'on utilise la même surface d'essai et pourvu que l'on respecte les limites des tests statistiques (voir chapitres 6 et 8).

Il est important de garder toujours à l'esprit que la méthode d'analyse des résultats se fonde sur l'hypothèse d'une réponse linéaire du véhicule. Tel peut ne pas toujours être le cas sur toute la plage des accélérations latérales et la solution classique consiste à réduire l'étendue du signal pour coïncider avec la plage linéaire et, si besoin est, à réaliser plusieurs essais à différents niveaux de signaux d'entrée qui couvriront à eux tous la totalité de la plage à étudier.

Il existe néanmoins une limite à la réduction du domaine du signal : si, en effet, l'amplitude d'entrée est trop faible, le niveau de signal parasite (qui est constant à une vitesse d'essai donnée sur une surface donnée) peut devenir trop significatif. Il faut donc en pratique réaliser un compromis qui dépend de la non-linéarité de la réponse dans la plage de comportement étudiée et de l'uniformité de la piste d'essais. On peut à cet effet mettre en œuvre la méthode d'essai en régime permanent sur trajectoire circulaire de l'ISO 4138. Il est évident, dans ce cas, que la piste d'essais utilisée doit être aussi lisse que possible.

On peut dire qu'avec les véhicules modernes, qui ont en général une bonne linéarité comme les clients peuvent en convenir, et avec des surfaces d'essai bien entretenues, on a peu de chances de rencontrer des problèmes de ce type.

2 Références

ISO 3833, *Véhicules routiers — Types — Dénominations et définitions.*

ISO 4138, *Véhicules routiers — Méthode d'essai en régime permanent sur trajectoire circulaire.*

ISO 7401, *Véhicules routiers — Méthodes d'essai en régime transitoire sous accélération latérale.*

3 Instrumentation

Voir ISO 7401.

NOTE — Les données sur l'angle de roulis du véhicule peuvent être recueillies par intégration d'un signal de vitesse de roulis. Pour mesurer la vitesse de roulis, il est recommandé d'utiliser un capteur ayant une étendue de ± 20 %s et une erreur maximale, combinée à celle du système enregistreur, de $\pm 0,2$ %s.

4 Conditions d'essai

Voir ISO 7401.

5 Mode opératoire

5.1 Échauffement des pneus

Voir ISO 7401.

5.2 Vitesse d'essai

Voir ISO 7401.

5.3 Amplitude de l'angle au volant

L'amplitude de l'angle au volant peut être déterminée

- a) en conduisant le véhicule en régime permanent sur un cercle de rayon donnant l'accélération latérale présélectionnée à la vitesse d'essai requise; ou
- b) par lecture en continu de l'accélération latérale instantanée pendant un essai à la vitesse requise avec un signal oscillatoire de fréquence la plus basse possible transmis au volant.

La valeur recommandée d'accélération latérale est de $\pm 2 \text{ m/s}^2$, mais la valeur utilisée ne devra normalement pas dépasser $\pm 4 \text{ m/s}^2$ du fait que la technique d'analyse repose sur l'hypothèse d'un comportement linéaire du véhicule (voir chapitre 1).

La valeur utilisée et l'angle au volant correspondant doivent être notés dans la présentation des données générales de l'annexe A.

L'amplitude de l'angle au volant doit être indiquée au conducteur sous la forme d'une marque appropriée tracée sur le volant. Il est important de ne pas utiliser de butées mécaniques qui peuvent altérer le contenu en harmoniques du signal d'entrée (voir 6.2).

Il n'est pas nécessaire de conserver exactement la même amplitude d'angle au volant sur toute la gamme des fréquences du signal d'entrée, pourvu que l'amplitude soit bien choisie (voir 6.2) et ne dépasse pas une valeur faisant sortir le véhicule de sa plage de fonctionnement linéaire.

5.4 Entrée aléatoire

Les essais doivent être réalisés par conduite du véhicule sur une ligne droite, à la vitesse d'essai requise (voir 5.2) et en transmettant dans le volant des signaux oscillatoires continus allant jusqu'aux limites d'amplitude d'angle au volant déterminées préalablement (voir 5.3) sur la gamme des fréquences étudiées. La fréquence du signal d'entrée doit couvrir toute la plage s'étendant depuis le minimum possible, généralement déterminé par les limites imposées par la vitesse d'essai et la largeur de piste disponible, jusqu'au maximum réalisable. Pour garantir une bonne teneur en hautes fréquences, le signal d'entrée doit être à haute énergie et l'essai doit durer plusieurs minutes.

Il est important que le signal d'entrée soit continu, car les périodes d'inactivité relative réduisent sérieusement le rapport signal/bruit. Dans l'idéal, l'essai devrait être réalisé d'une seule traite, mais des considérations d'ordre pratique s'y opposent pour deux raisons : d'une part, la piste d'essais peut n'être pas suffisamment longue pour permettre une course continue de cette durée au niveau d'accélération latérale moyenne requise et, d'autre part, l'ordinateur utilisé pour traiter les données peut n'être pas assez performant pour analyser toutes les données en une seule fois. Dans les deux cas, il est admis de prévoir plusieurs courses plus courtes et, après avoir calculé pour chacune la densité spectrale de puissance, de faire la moyenne des résultats (voir annexe B, chapitre B.1). La fonction d'intégration utilisée doit être notée (voir chapitre 7).

6 Analyse des données

6.1 Généralités

Le traitement des données exposé ci-après peut être réalisé très rapidement si l'on dispose d'un analyseur multicanaux en temps réel, sinon il faut d'abord numériser les données puis les traiter à l'aide d'un ordinateur doté du logiciel approprié (voir annexe B).

6.2 Analyse préliminaire

Afficher la fonction historique enregistrée de la vitesse longitudinale et l'examiner pour vérifier qu'elle ne s'écarte pas de plus de 5 % de sa valeur nominale. Si oui, rejeter les résultats.

Filter les données satisfaisantes pour éliminer toutes celles qui dépassent 15 Hz et numériser chaque fonction historique à une vitesse d'au moins 40 échantillons par seconde.

Effectuer une analyse de Fourier de la fonction historique de l'angle au volant et afficher le résultat sous forme graphique, en portant sur la courbe le niveau de signal d'angle au volant en fonction de la fréquence minimale par rapport à la fréquence indiquée dans l'annexe C, figure 2.

Examiner la courbe pour vérifier la teneur en fréquences. La différence recommandée entre le maximum et le minimum ne doit pas dépasser 12 dB. Si la différence est supérieure, rejeter les résultats ou, si l'on désire néanmoins les exploiter, noter l'ampleur de la différence dans la présentation des données générales de l'annexe A.

6.3 Poursuite de l'analyse

Continuer à traiter les données numérisées résultant de ce qui précède de la manière suivante :

- convertir par intégration, si on les a mesurées, les séquences de données de vitesse de roulis en séquences d'angle de roulis;
- corriger, si besoin est, les valeurs d'accélération latérale en fonction de l'angle de roulis du véhicule (voir ISO 7401). Cette opération est généralement nécessaire, sauf si l'accéléromètre est monté sur une plate-forme stabilisée.

Traiter les données à l'aide d'un matériel approprié (voir 6.1 et annexe B) pour obtenir l'amplitude de la fonction de transfert et son déphasage, ainsi que la fonction de cohérence des combinaisons choisies de variables d'entrée et de sortie.

Les combinaisons jugées utiles sont

- accélération latérale par unité d'angle au volant;
- vitesse de lacet par unité d'angle au volant;
- angle ou vitesse de roulis par unité d'angle au volant;
- accélération latérale par unité de couple au volant;
- angle ou vitesse de roulis par unité d'accélération latérale.

7 Présentation des données

Les données générales doivent être présentées sous la forme sommaire indiquée dans l'annexe A.

Pour chaque paire de variables d'entrée et de sortie choisies, présenter sur un graphique, du type indiqué à la figure 3 de l'annexe C, les fonctions de réponse en fréquence (gain), la fonction d'angle de phase et la fonction de cohérence, ainsi que le nombre et la longueur des séquences de données, la fonction d'intégration, la vitesse de numérisation et la fonction de fenêtrage utilisées. Les unités de la fonction de réponse en fréquence sont le mètre par seconde carrée par degré pour l'accélération latérale, le degré par seconde par degré pour la vitesse de lacet, le degré par degré pour l'angle de roulis et le newton mètre par degré pour le couple au volant.

Si l'on a mesuré l'angle de roulis ou la vitesse de roulis, on peut présenter sur un graphique, du type indiqué à la figure 4 de l'annexe C, la réponse en roulis à l'accélération latérale. Les unités de la fonction de réponse en fréquence sont le degré par mètre par seconde carrée pour l'angle de roulis et le degré par seconde par mètre par seconde carrée pour la vitesse de roulis.

8 Interprétation des données

L'annexe D donne la signification des résultats d'essai internes de dynamique du véhicule, mais quelques remarques sont à faire ici quant à la signification statistique des résultats.

Le paramètre le plus important du présent Rapport technique est la fonction de cohérence, qui évalue la quantité d'informations non corrélées ou de bruit présent dans les données. Si la cohérence est élevée, c'est-à-dire voisine de 1, le signal de sortie peut être considéré comme une réponse entièrement due au signal d'entrée transmis au volant. Une valeur de cohérence plus faible indique que d'autres facteurs que le signal d'entrée au volant influent sur la réponse. Les valeurs basses de cohérence traduisent généralement des signaux d'entrée inappropriés ou une réponse faible du véhicule.

Les tableaux 1 et 2 de l'annexe E représentent les limites de confiance à 90 % de l'angle d'amplitude et de l'angle de phase en fonction des valeurs mesurées et du nombre de moyennes. Ils indiquent également les limites de confiance à 90 % de la fonction de cohérence elle-même.

On peut voir que pour obtenir des limites étroites, il faut avoir des niveaux élevés de cohérence et/ou un grand nombre de moyennes.

Il est recommandé de fixer les limites de confiance à 90 % du gain entre + 1 dB et - 1,5 dB et celles de l'angle de phase à $\pm 10^\circ$.

Le nombre de moyennes nécessaires dans ce but dépend de la cohérence, qui dépend elle-même de la quantité de données non corrélées et, par suite, de la qualité des conditions d'essai.

9 Bibliographie

- [1] HOFFMAN, E.R. Human control of road vehicles. *Vehicle system dynamics*, Vol. 5, Nos. 1-2, August 1975, pp. 105-106.
- [2] GOOD, M.C. Sensitivity of driver vehicle performance characteristics revealed in open loop tests. *Vehicle system dynamics*, Vol. 6, No. 4, October 1977, pp. 245-277.

iTeh STANDARD PREVIEW
(standards.iteh.ai)

ISO/TR 8726:1988

<https://standards.iteh.ai/catalog/standards/sist/d6d79e65-20fd-4f5c-ac91-ec61da127a9b/iso-tr-8726-1988>

Annexe A

Présentation des données générales

Numéro de l'essai :

Identification du véhicule

Marque, année, modèle, type :

Numéro du véhicule :

Type de direction :

Type de suspension : Avant :

Arrière :

Taille du moteur :

Équipement en option :

Pneus et état des pneus :

Pression de gonflage des pneus— à froid : Avant : bar¹⁾

Arrière : bar

— à chaud (en cas de mesurage) : Avant : bar

Arrière : bar

Jantes : <https://standards.iteh.ai/catalog/standards/sist/d6d79e65-20fd-4f5c-ac91-ec61da127a9b/iso-tr-8726-1988>

Empattement : m

Voie : Avant : m

Arrière : m

Rapport global de direction :

Autres données (notamment réglages importants de la suspension) :

Chargement du véhicule

État et emplacement de la charge :

Masse du véhicule essayé : Avant gauche : kg Avant droit : kg

Arrière gauche : kg Arrière droit : kg

TOTAL : kg

Répartition des masses : kg à l'avant/ kg à l'arrière

Hauteur du centre de gravité du véhicule [mesurée/estimée²⁾] : m1) 1 bar = 10⁵ Pa = 10⁵ N/m²

2) Biffer la mention inutile.

Conditions d'essai

Description de la surface d'essai :

Conditions atmosphériques :

- température : °C
- vitesse du vent : m/s

Vitesse d'essai : m/s

Accélération latérale moyenne et plage : ± °

Angle correspondant au volant et plage : ± °

Différence entre gain maximal et gain minimal d'angle au volant : dB

Rapport de direction :

Personnel d'essai

Conducteur :

Observateur :

Analyste :

Observations d'ordre général

.....
.....
.....

iTeh STANDARD PREVIEW
(standards.iteh.ai)

ISO/TR 8726:1988
<https://standards.iteh.ai/catalog/standards/sist/d6d79e65-20fd-4f5c-ac91-ec61da127a9b/iso-tr-8726-1988>

Annexe B

Traitement des données

B.1 Symboles

Les symboles suivants sont utilisés :

$C_{xy}(f)$	Fonction de densité spectrale
f	Fréquence du cycle
$G_x(f), G_y(f)$	Fonction de densité spectrale de puissance
$G_{xy}(f)$	Fonction de densité spectrale croisée
$ H(f) $	Fonction de réponse en fréquence
$H(f)$	Facteur de gain de la fonction de réponse en fréquence
$N(f)$	Composante d'entrée étrangère due au bruit
$Q_{xy}(f)$	Fonction de densité spectrale de quadrature
$x(t)$	Variable d'entrée dépendant du temps
$y(t)$	Variable de sortie dépendant du temps
$X(f), Y(f)$	Transformées en Fourier de $x(t), y(t)$
$\gamma_{xy}(f)$	Fonction de cohérence
$\theta_{xy}(f)$	Argument de $G_{xy}(f)$
$\phi(f)$	Phase du système

B.2 Mode opératoire

L'essai de signal d'entrée aléatoire sert à extraire la fonction de réponse en fréquence $H(f)$ par rapport à l'accélération latérale, à la vitesse de lacet et au déplacement en roulis lorsqu'un signal d'entrée est envoyé à la direction d'un véhicule fonctionnant dans sa plage linéaire.

Pour obtenir la fonction de réponse en fréquence d'un système linéaire à paramètres constants excité par une fonction aléatoire permanente, il est nécessaire d'effectuer les opérations suivantes :

- 1 Numérotation des données.
- 2 Troncature de la séquence de données ou addition de zéros pour permettre l'adaptation au programme.
- 3 Troncature de la séquence de données résultante à l'aide d'une fonction de fenêtre appropriée, par exemple cosinus ou Hanning.
- 4 Extraction des coefficients de Fourier complexes grâce au programme des transformées de Fourier.
- 5 Multiplication par le facteur de correction de fenêtre.
- 6 Calcul de $G_{nx}(f), G_{ny}(f), G_{nxy}(f)$.
- 7 Calcul des fonctions intégrées $G_x(f), G_y(f), G_{xy}(f)$.
- 8 Calcul de $H(f), \phi(f), \gamma_{xy}(f)$.

Ce mode opératoire est résumé dans l'organigramme ci-après (voir figure 1). Un exposé détaillé de la théorie sous-jacente figure dans les références bibliographiques du chapitre B.4.

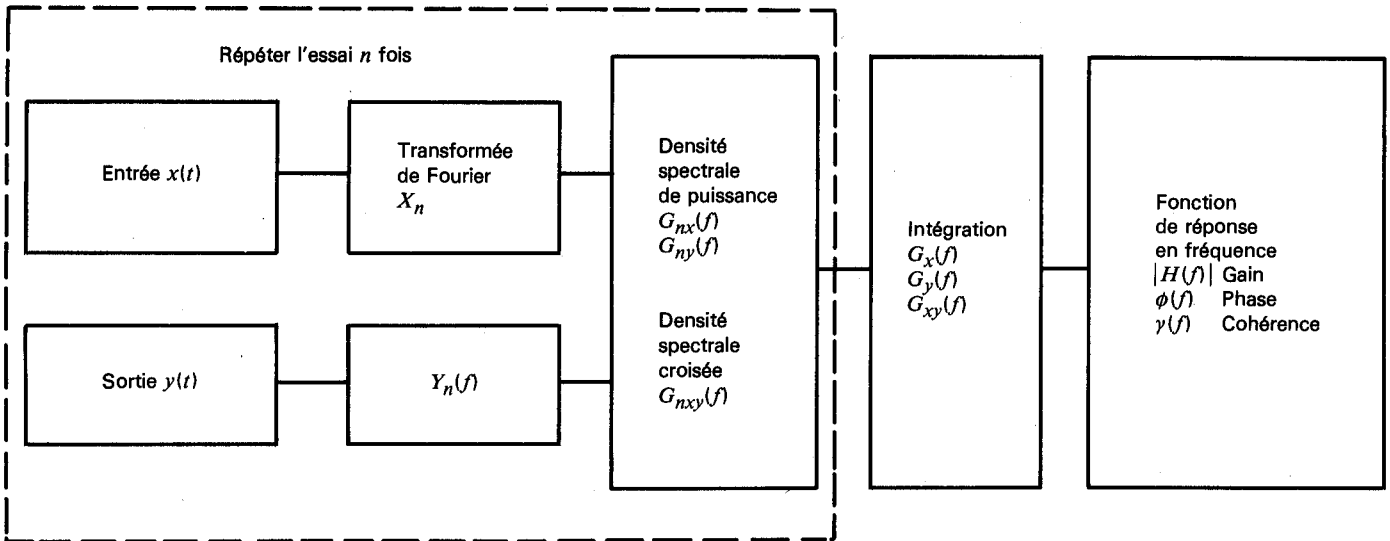


Figure 1 – Organigramme

Fonction de réponse en fréquence :

$$H(f) = \frac{G_{xy}(f)}{G_x(f)}$$

Gain du système :

$$|H(f)| = \frac{|G_{xy}(f)|}{G_x(f)}$$

iTeh STANDARD PREVIEW
(standards.iteh.ai)

ISO/TR 8726:1988

Dans les deux cas, $G_{xy}(f)$ est une fonction complexe :

$$G_{xy}(f) = C_{xy}(f) - j Q_{xy}(f)$$

dépendant de la corrélation entre la sortie et l'entrée.

On élimine, soit par intégration comme ci-dessus, soit en utilisant un échantillon de grande longueur, toute partie du signal de sortie telle qu'un bruit étranger qui ne peut pas être liée au signal d'entrée par une fonction linéaire (voir chapitre B.3).

$G_x(f)$ étant une fonction réelle, la phase du système $\phi(f)$ est la même que l'argument de $G_{xy}(f)$:

$$\phi(f) = \theta_{xy}(f) = \tan^{-1} \left[\frac{Q_{xy}(f)}{C_{xy}(f)} \right]$$

Le gain scalaire $|H_s(f)|$ est donné par

$$|H_s(f)|^2 = \frac{G_y(f)}{G_x(f)}$$

La fonction de cohérence $\gamma_{xy}(f)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^2(f) &= \frac{|H(f)|^2}{|H_s(f)|^2} \\ &= \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_x^2(f)} \times \frac{G_x(f)}{G_y(f)} \\ &= \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_x(f) \times G_y(f)} \end{aligned}$$

Deux cas peuvent se présenter :

- si $\gamma_{xy}(f) = 1$, alors $x(t)$ et $y(t)$ sont corrélés à une fréquence particulière;
- si $\gamma_{xy}(f) < 1$, alors $x(t)$ et $y(t)$ ne sont pas corrélés, ou bien il existe du bruit dans le signal de sortie ou encore les signaux d'entrée sont multiples.

B.3 Effet d'une composante d'entrée étrangère due au bruit

Soit

$$\begin{aligned} X &= X(f) & G_x &= G_x(f) \\ Y &= Y(f) & G_y &= G_y(f) \\ \gamma &= \gamma_{xy}(f) & G_{xy} &= G_{xy}(f) \\ N &= N(f) & H &= H(f) \end{aligned}$$

Densité spectrale de puissance d'entrée $G_x = XX^*$

Densité spectrale de puissance de sortie $G_y = YY^*$

Généralement parlant $Y = H(X + N)$

où

X, Y sont les composantes réelles;

X^*, Y^* sont les composantes imaginaires des fonctions complexes X, Y .

Ainsi

$$\begin{aligned} G_y &= HH^* (X + N) (X + N)^* \\ &= HH^* (XX^* + NN^* + NX^* + NX^*) \end{aligned}$$

Mais XN et NX disparaissent à l'intégration :

$$\begin{aligned} G_y &= HH^* (XX^* + NN^*) \\ &= HH^* (G_x + NN^*) \end{aligned} \quad \dots (1)$$

Densité spectrale croisée :

$$\begin{aligned} G_{xy} &= YX^* \\ &= H(X + N)X^* \\ &= HXX^* \text{ puisque } NX^* \text{ disparaît à l'intégration} \\ &= HG_x \end{aligned} \quad \dots (2)$$

Fonction de cohérence :

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^2 &= \frac{|G_{xy}|^2}{G_x G_y} \\ &= \frac{|H|^2 G_x^2}{G_x |H|^2 (G_x + NN^*)} \\ &= \frac{G_x}{(G_x + NN^*)} \end{aligned}$$