NORME INTERNATIONALE

ISO 24185

Première édition
2022-08

Évaluation de l'incertitude de mesure d'un processus stationnaire autocorrélé

Evaluation of the uncertainty of measurements from a stationary autocorrelated process

Numéro de référence
ISO 24185:2022(F)

ISO copyright office
Case postale 401 • Ch. de Blandonnet 8
CH-1214 Vernier, Genève
Tél.: +41 22 749 01 11
E-mail: copyright@iso.org
Web: www.iso.org

Publié en Suisse

Sommaire

Page

Avant-propos

L'ISO (Organisation internationale de normalisation) est une fédération mondiale d'organismes nationaux de normalisation (comités membres de l'ISO). L'élaboration des Normes internationales est en général confiée aux comités techniques de l'ISO. Chaque comité membre intéressé par une étude a le droit de faire partie du comité technique créé à cet effet. Les organisations internationales, gouvernementales et non gouvernementales, en liaison avec l'ISO participent également aux travaux. L'ISO collabore étroitement avec la Commission électrotechnique internationale (IEC) en ce qui concerne la normalisation électrotechnique.

Les procédures utilisées pour élaborer le présent document et celles destinées à sa mise à jour sont décrites dans les Directives ISO/IEC, Partie 1. Il convient, en particulier, de prendre note des différents critères d'approbation requis pour les différents types de documents ISO. Le présent document a été rédigé conformément aux règles de rédaction données dans les Directives ISO/IEC, Partie 2 (voir www.iso.org/directives).

L'attention est attirée sur le fait que certains des éléments du présent document peuvent faire l'objet de droits de propriété intellectuelle ou de droits analogues. L'ISO ne saurait être tenue pour responsable de ne pas avoir identifié de tels droits de propriété et averti de leur existence. Les détails concernant les références aux droits de propriété intellectuelle ou autres droits analogues identifiés lors de l'élaboration du document sont indiqués dans l'Introduction et/ou dans la liste des déclarations de brevets reçues par l'ISO (voir www.iso.org/brevets).

Les appellations commerciales éventuellement mentionnées dans le présent document sont données pour information, par souci de commodité, à l'intention des utilisateurs et ne sauraient constituer un engagement.

Pour une explication de la nature volontaire des normes, la signification des termes et expressions spécifiques de l'ISO liés à l'évaluation de la conformité, ou pour toute information au sujet de l'adhésion de l'ISO aux principes de l'Organisation mondiale du commerce (OMC) concernant les obstacles techniques au commerce (OTC), voir www.iso.org/avant-propos.

Le présent document a été élaboré par le comité technique ISO/TC 69, *Application des méthodes statistiques*, sous-comité SC 6, *Méthodes et résultats de mesure*.

Il convient que l'utilisateur adresse tout retour d'information ou toute question concernant le présent document à l'organisme national de normalisation de son pays. Une liste exhaustive desdits organismes se trouve à l'adresse www.iso.org/fr/members.html.

Introduction

En métrologie, il est courant de calculer la dispersion ou l'écart-type de la moyenne de mesurages répétés, à savoir l'incertitude de mesure de la moyenne de l'échantillon, en utilisant l'écart-type de l'échantillon des mesurages divisé par la racine carrée de l'effectif de l'échantillon. L'incertitude-type calculée est un estimateur de l'écart-type de la moyenne de l'échantillon lorsque les mesurages répétés ont la même moyenne et la même variance et qu'ils ne sont pas corrélés. Cependant, il arrive souvent que les mesurages soient corrélés. Dans des productions continues, comme dans l'industrie chimique, la plupart des données de processus sur les caractéristiques qualité sont autocorrélées. En général, l'autocorrélation peut être causée par le système de mesure, la dynamique du processus, ou les deux. Dans de nombreux cas, les données peuvent présenter un comportement de dérive. En biologie, la variation biologique aléatoire, par exemple l'augmentation aléatoire de la sécrétion d'une substance qui influence la pression artérielle, peut avoir un effet durable, de sorte que plusieurs mesurages consécutifs soient influencés par le même phénomène aléatoire. En matière de collecte des données, lorsque l'intervalle d'échantillonnage est court, l'autocorrélation, en particulier l'autocorrélation positive des données, est un problème.

Lorsque les mesurages proviennent d'un processus autocorrélé, il est inapproprié d'évaluer l'incertitude-type de la moyenne de l'échantillon comme décrit ci-dessus. Comme stipulé dans le Guide ISO/IEC 98-3:2008, 4.2.7, «S'il existe une corrélation entre les variations aléatoires des observations d'une grandeur d'entrée, par exemple en fonction du temps, la moyenne et l'écart-type expérimental de la moyenne donnés en 4.2.1 et 4.2.3, peuvent être des estimateurs (C.2.25) impropres des statistiques recherchées (C.2.23)».

Les processus autocorrélés peuvent être classés dans deux types de processus selon qu'ils sont stationnaires ou non stationnaires:

a) processus stationnaire – extension directe d'une séquence indépendante et identiquement distribuée (i.i.d.). Un processus autocorrélé est stationnaire s'il est à un état «d'équilibre statistique». Cela implique que le comportement de base du processus ne varie pas dans le temps. En particulier, un processus stationnaire a une moyenne et une variance qui sont constantes dans le temps;

b) processus non stationnaire – processus qui n'est pas stationnaire.

Le présent document a pour but de fournir une méthode pour évaluer l'incertitude-type de la moyenne des mesurages provenant d'un processus stationnaire.

Évaluation de l'incertitude de mesure d'un processus stationnaire autocorrélé

1 Domaine d’application

Le présent document décrit une méthode pour évaluer l’incertitude-type de la moyenne d’un processus, qui provient d’une variation observable de mesurages successifs éventuellement autocorrélés. Dans le présent document, les mesurages successifs sont limités aux processus stationnaires. Le présent document comprend également des tests de validité des hypothèses. L’incertitude résultante est liée à l’incertitude provenant de mesurages observables, en tenant également compte d’autres sources d’incertitude.

2 Références normatives

Les documents suivants cités dans le texte constituent, pour tout ou partie de leur contenu, des exigences du présent document. Pour les références datées, seule l’édition citée s’applique. Pour les références non datées, la dernière édition du document de référence s’applique (y compris les éventuels amendements).

ISO 3534-2, *Statistique — Vocabulaire et symboles — Partie 2: Statistique appliquée*

3 Termes et définitions

Pour les besoins du présent document, les termes et définitions donnés dans l’ISO 3534-2 ainsi que les suivants, s’appliquent.

L’ISO et l’IEC tiennent à jour des bases de données terminologiques destinées à être utilisées en normalisation, consultables aux adresses suivantes:

— ISO Online browsing platform: disponible à l’adresse https://www.iso.org/obp

— IEC Electropedia: disponible à l’adresse https://www.electropedia.org/

3.1 Termes

3.1.1
processus stationnaire en covariance
processus faiblement stationnaire
processus stationnaire
processus stochastique caractérisé par une moyenne de processus constante, une variance de processus constante et une fonction d’autocovariance, qui dépend uniquement de la différence des indices du processus et qui ne dépend pas de l’indice du processus

3.1.2
autocovariance
covariance interne entre les membres d’une séquence d’observations ordonnées

3.2 Termes abrégés et symboles

3.2.1 Termes abrégés

i.i.d. indépendant et identiquement distribué

FAC	fonction d’autocorrélation

3.2.2 Symboles

T	ensemble d’indices pour un processus stochastique
X_t	variable aléatoire X au temps t
$X_{t,\mathrm{A}}$	composante de X_t qui correspond à la composante d’incertitude de Type A de X_t
e_{B_t}	composante de X_t qui a une moyenne nulle et qui correspond à la composante d’incertitude de Type B de X_t
μ_t	moyenne vraie de X_t
μ	moyenne vraie d’un processus stationnaire
σ_t	écart-type vrai de X_t
σ	écart-type vrai d’un processus stationnaire $\{X_t\}$
σ_A	écart-type vrai de $X_{t,\mathrm{A}}$ pour un processus stationnaire $\{X_t\}$
σ_B	écart-type vrai de e_B pour un processus stationnaire $\{X_t\}$
u_B	évaluation de Type B de l’incertitude-type de $\{X_t\}$
$N\left(\mu,\sigma^2\right)$	distribution normale avec une moyenne μ et une variance σ^2
$\gamma(t_1,t_2)$	autocovariance entre X_{t_1} et X_{t_2}
$\rho(t_1,t_2)$	autocorrélation entre X_{t_1} et X_{t_2}
τ	décalage entre deux indices de processus
$\gamma(\tau)$	autocovariance d’un processus stationnaire au décalage τ
$\hat{\gamma}(\tau)$	estimateur de $\rho(\tau)$
$\rho(\tau)$	autocorrélation d’un processus stationnaire au décalage τ
$\hat{\rho}(\tau)$	estimateur de $\gamma(\tau)$
$\hat{\sigma}_{\hat{\rho}(i)}$	estimateur de l’écart-type de $\hat{\rho}(i)$
x_t	une valeur de X_t pour l’indice t
$\overline{x}$	valeur moyenne arithmétique d’une séquence de x
s_x	écart-type empirique d’une séquence de x

4 Processus stochastique et série temporelle

4.1 Généralités

Un processus stochastique $\{X_t;t\in T\}$ est une collection de variables aléatoires, où T est un ensemble d’indices[3] du processus. Lorsque T représente le temps, le processus stochastique est une série temporelle. Lorsque T prend un ensemble discret de valeurs, par exemple $T=\{1,2,...\}$, le processus est appelé série temporelle discrète. Dans le présent document, seules les séries temporelles discrètes qui sont espacées de manière égale dans le temps sont prises en considération. Une série temporelle discrète $x_1,...,x_N$ peut être considérée comme les valeurs prises par une séquence de variables aléatoires de $X_1,...,X_N$.. La séquence de $x_1,...,x_N$ est appelée réalisation de $X_1,...,X_N$.

4.2 Autocovariance et autocorrélation d'un processus stochastique

Si $\{X_t; t\in T\}$ est un processus stochastique avec une moyenne μ_t et un écart-type σ_t à t,

a) pour tout $t_1, t_2 \in T$, la fonction d'autocovariance $\gamma(\cdot)$ est:

$$\gamma(t_1,t_2)=\mathrm{E}\left[\left(X_{t_1}-\mu_{t_1}\right)\left(X_{t_2}-\mu_{t_2}\right)\right]$$

b) pour tout $t_1, t_2 \in T$, la fonction d'autocorrélation $\rho(\cdot)$ est:

$$\rho(t_1,t_2)=\frac{\gamma(t_1,t_2)}{\sigma_{t_1}\sigma_{t_2}}$$

Pour un processus stochastique ou une série temporelle, s'il existe un $\rho(t_1,t_2)$ non nul pour tout $t_1 \neq t_2$, alors le processus stochastique ou la série temporelle est dit(e) autocorrélé(e).

4.3 Processus stationnaire

4.3.1 Généralités

Comme défini en 3.1.1, un processus stationnaire désigne un processus faiblement stationnaire ou stationnaire en covariance. Un processus stochastique est dit stationnaire s'il est à un état «d'équilibre statistique». Voir la Référence [4], p. 14. En effet, le comportement de base d'un tel processus ne varie pas avec l'indice du processus. Dans le présent document, le processus stochastique $\{X_t; t\in T\}$ est dit stationnaire en covariance, faiblement stationnaire ou stationnaire si:

a) $\mathrm{E}[X_t]=\mu$ (constant pour tous les t);

b) variance $\mathrm{Var}[X_t]=\sigma^2<\infty$ (c'est-à-dire une constante finie pour tous les t);

c) $\gamma(t_1,t_2)$ dépend uniquement du décalage $\tau=t_1-t_2$ et ne dépend pas de t. Dans ce cas, $\gamma(t_1,t_2)$ est donné par $\gamma(\tau)=\gamma(t_1,t_2)=\gamma(|t_1-t_2|)$.

Les deux premières exigences sont que le processus stochastique ait une moyenne constante et une variance constante. La troisième exigence est que la fonction d'autocovariance ne dépende que du décalage et ne dépende pas de t. Si une ou plusieurs de ces exigences ne sont pas satisfaites, le process est non stationnaire. Pour un processus stationnaire, la fonction d'autocovariance au décalage τ est donnée par $\gamma(\tau)$. Lorsque le processus est une série temporelle, la différence dans les indices de processus, t_1-t_2, correspond à un écart dans le temps.

La fonction d'autocorrélation (FAC) d'un processus stationnaire ou d'une série temporelle au décalage τ est donnée par:

$$\rho(\tau)=\frac{\gamma(\tau)}{\sigma^2}$$

Noter que $\rho(0)=1$.

4.3.2 Bruit blanc

Une série temporelle est appelée bruit blanc si:

a) $\{X_t\}$ sont distribués de manière identique avec la même moyenne et la même variance finie pour tous les t;

b) l'autocovariance $\gamma(t_1, t_2) = 0$ lorsque $t_1 \neq t_2$ pour tout t_1 et t_2.

On déduit de b) que toutes les autocorrélations de bruit blanc avec des décalages non nuls sont nulles. D'après a) et b), le bruit blanc est un cas particulier de processus stationnaire. Lorsque $\{X_t\}$ est un bruit blanc avec la même distribution pour chaque t, il s'agit d'une séquence i.i.d.

4.4 Estimation de la moyenne, de l'autocovariance et de l'autocorrélation pour un processus stationnaire

4.4.1 Estimation de μ

Étant donnée une réalisation $\{x_t; t = 1, 2, ..., N\}$ d'un processus stationnaire $\{X_t\}$, une pratique courante consiste à estimer la moyenne du processus μ par la moyenne arithmétique ou la moyenne de l'échantillon $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} x_t$.

4.4.2 Estimation de $\gamma(\tau)$ et de $\rho(\tau)$

Étant donnée une réalisation d'un processus stationnaire, $\{x_t; t = 1, 2, ..., N\}$, l'autocovariance à τ est estimée par:

$\hat{\gamma}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-|\tau|}(x_t - \bar{x})(x_{t+|\tau|} - \bar{x})$ pour $\tau = -(N-1), ..., -1, 0, 1, ..., (N-1)$ et zéro pour $|\tau| \geq N$ [3]. En particulier, lorsque $\tau = 0$ $\hat{\gamma}(0)$ est un estimateur de la variance du processus. Dans la pratique, la variance usuelle de l'échantillon s_X^2 qui utilise $N-1$ au dénominateur à la place de N est souvent utilisée à la place de $\hat{\gamma}(0)$. L'estimateur de l'autocorrélation correspondante, appelée autocorrélation empirique, est donné par la Formule (1):

$$\hat{\rho}(\tau) = \frac{\hat{\gamma}(\tau)}{\hat{\gamma}(0)} = \frac{\sum_{t=1}^{N-|\tau|}(x_t - \bar{x})(x_{t+|\tau|} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{N}(x_t - \bar{x})^2} \tag{1}$$

Dans la pratique, pour obtenir une estimation utile de la fonction d'autocorrélation, une règle pratique (voir la Référence [5], p. 32), est que $N \geq 50$ et $|\tau| \leq N/4$.

4.5 Tests d'autocorrélation des données d'un processus stationnaire

Un test simple pour vérifier si les données de processus sont indépendantes du bruit blanc consiste à construire la fonction d'autocorrélation de l'échantillon (FAC) avec une bande de confiance. La séquence $\hat{\rho}(i)$ pour $i = 1, \ldots, N$ des valeurs d'autocorrélation de l'échantillon est formée à partir des valeurs $x_1, \ldots, x_N$. Pour $i \geq 1$, il convient qu'environ 95 % de $\hat{\rho}(i)$ se situe dans les limites de $\pm 1{,}96/\sqrt{N}$.

NOTE Ce test utilise le résultat selon lequel, quand N est élevé, les autocorrélations d'échantillon, $\{\hat{\rho}(\tau)\}$, d'une séquence indépendante du bruit blanc $X_1, \ldots, X_N$ avec une variance finie sont approximativement indépendantes et normalement identiquement distribuées avec une moyenne nulle et une variance égale à $1/N$ (voir la Référence [6], p. 222-223, et la Référence [5], p. 32-34). Cette approche est souvent utilisée pour vérifier si les données de processus sont autocorrélées[6][7].

La variance d'une autocorrélation d'échantillon est utilisée pour vérifier si l'autocorrélation est significativement différente de zéro. L'écart-type de l'autocorrélation de l'échantillon au décalage i est approximé selon la Référence [8], comme indiqué par les Formules (2) et (3):

$$\hat{\sigma}_{\hat{\rho}(1)} = 1/\sqrt{N} \tag{2}$$

et

$$\hat{\sigma}_{\hat{\rho}(i)} = \sqrt{\frac{1+2\sum_{k=1}^{i-1}\hat{\rho}^2(k)}{N}} \quad \text{pour } i=2,3,\ldots \tag{3}$$

D'après ce qui précède,

$$|\,\hat{\rho}(i)\,| > 1{,}96\sqrt{\frac{1}{N}} \quad \text{pour } i=1 \tag{4}$$

et

$$|\,\hat{\rho}(i)\,| > 1{,}96\sqrt{\frac{1+2\sum_{k=1}^{i-1}\hat{\rho}^2(k)}{N}} \quad \text{pour } i=2,3,\ldots \tag{5}$$

infirment l'hypothèse selon laquelle $\rho(i)=0$ au niveau $\alpha=0{,}05$ pour $i=1,2,3,\ldots$. C'est-à-dire que si l'inégalité dans la Formule (4) ou la Formule (5) est vérifiée, cela indique que l'hypothèse que $\rho(i)=0$ n'est pas acceptable au niveau $\alpha=0{,}05$.

Des procédures de maîtrise statistique des procédés données dans ISO 7870-9 peuvent être appliquées pour vérifier si une séquence de mesurages provient d'un processus stationnaire en vérifiant que sa moyenne et sa variance sont constantes.

5 Incertitude d'une moyenne d'échantillon pour des mesurages stationnaires

En métrologie, lorsque $\{x_1,\ldots,x_N\}$ est une réalisation des variables aléatoires mutuellement indépendantes et identiquement distribuées, $\{X_1,\ldots,X_N\}$, l'incertitude-type de la moyenne de l'échantillon $\overline{x}$ est calculée comme suit:

$$u_{\overline{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}} \tag{6}$$

où s_x est l'écart-type de l'échantillon des mesurages (voir le Guide ISO/IEC 98-3:2008, 4.2.3). Toutefois, dans de nombreux cas, les mesurages sont autocorrélés. Le Guide ISO/IEC 98-3:2008, 4.2.7, stipule que «S'il existe une corrélation entre les variations aléatoires des observations d'une grandeur d'entrée, par exemple en fonction du temps, la moyenne et l'écart-type expérimental de la moyenne indiqués en 4.2.1 et 4.2.3 peuvent être des estimateurs impropres des statistiques recherchées».