INTERNATIONAL STANDARD

NORME INTERNATIONALE

**ISO 3534-1**

First edition
Première édition
1993-06-01

# Statistics — Vocabulary and symbols —

## Part 1 :
Probability and general statistical terms



# Statistique — Vocabulaire et symboles —

## Partie 1 :
Probabilité et termes statistiques généraux



Reference number
Numéro de référence
ISO 3534-1 : 1993 (E/F)

## Contents

## Sommaire

# Foreword

ISO (the International Organization for Standardization) is a worldwide federation of national standards bodies (ISO member bodies). The work of preparing International Standards is normally carried out through ISO technical committees. Each member body interested in a subject for which a technical committee has been established has the right to be represented on that committee. International organizations, governmental and non-governmental, in liaison with ISO, also take part in the work. ISO collaborates closely with the International Electrotechnical Commission (IEC) on all matters of electrotechnical standardization.

Draft International Standards adopted by the technical committees are circulated to the member bodies for voting. Publication as an International Standard requires approval by at least 75 % of the member bodies casting a vote.



International Standard ISO 3534-1 was prepared by Technical Committee ISO/TC 69, *Applications of statistical methods,* Sub-Committee SC 1, *Terminology and symbols*.

This first edition, together with ISO 3534-2, cancels and replaces ISO 3534 : 1977, which has been technically revised.



ISO 3534 consists of the following parts, under the general title *Statistics — Vocabulary and symbols*:

— *Part 1: Probability and general statistical terms*

— *Part 2: Statistical quality control*

— *Part 3: Design of experiments*.

Annex A forms an integral part of this part of ISO 3534.



International Organization for Standardization
Case postale 56 • CH-1211 Genève 20 • Switzerland

Printed in Switzerland/Imprimé en Suisse

## Avant-propos

L'ISO (Organisation internationale de normalisation) est une fédération mondiale d'organismes nationaux de normalisation (comités membres de l'ISO). L'élaboration des Normes internationales est en général confiée aux comités techniques de l'ISO. Chaque comité membre intéressé par une étude a le droit de faire partie du comité technique créé à cet effet. Les organisations internationales, gouvernementales et non gouvernementales, en liaison avec l'ISO participent également aux travaux. L'ISO collabore étroitement avec la Commission électrotechnique internationale (CEI) en ce qui concerne la normalisation électrotechnique.

Les projets de Normes internationales adoptés par les comités techniques sont soumis aux comités membres pour vote. Leur publication comme Normes internationales requiert l'approbation de 75 % au moins des comités membres votants.



La Norme internationale ISO 3534-1 a été élaborée par le comité technique ISO/TC 69, *Application des méthodes statistiques,* sous-comité SC 1, *Terminologie et symboles*.

Cette première édition, ensemble avec l'ISO 3534-2, annule et remplace l'ISO 3534 : 1977, qui a fait l'objet d'une révision technique.



L'ISO 3534 comprend les parties suivantes, présentées sous le titre général *Statistique — Vocabulaire et symboles*:

— *Partie 1: Probabilité et termes statistiques généraux*

— *Partie 2: Maîtrise statistique de la qualité*

— *Partie 3: Plans d'expérience*.

L'annexe A fait partie intégrante de la présente partie de l'ISO 3534.

This page intentionally left blank

# Statistics — Vocabulary and symbols —

## Part 1:
Probability and general statistical terms

# Statistique — Vocabulaire et symboles —

## Partie 1:
Probabilité et termes statistiques généraux



### Scope

This part of ISO 3534 defines probability and general statistical terms which may be used in the drafting of other International Standards. In addition, it defines symbols for a limited number of these terms.

The terms are classified under the following main headings:

— Terms used in the theory of probability

— General statistical terms

— General terms relating to observations and test results

— General terms relating to methods of sampling.

The entries in this part of ISO 3534 are arranged analytically and alphabetical indexes in English and French are provided.

Annex A gives a list of symbols and abbreviations used in this part of ISO 3534.

### Domaine d'application

La présente partie de l'ISO 3534 définit les termes concernant la probabilité et les termes statistiques généraux susceptibles d'être utilisés dans la rédaction d'autres normes internationales. En outre, elle définit un ensemble de symboles pour un nombre limité de ces termes.

Les termes sont classés sous les principales rubriques suivantes:

— Termes utilisés en calcul des probabilités

— Termes statistiques généraux

— Termes généraux relatifs aux observations et aux résultats d'essais

— Termes généraux relatifs aux méthodes d'échantillonnage.

Les entrées dans la présente partie de l'ISO 3534 sont présentées de façon analytique et des index alphabétiques anglais et français sont donnés.

L'annexe A donne une liste des symboles utilisés dans la présente partie de l'ISO 3534.

# Section 1: Terms used in the theory of probability

Many terms are given both in this section and in section 2. Nevertheless, it seems useful to define them separately to draw the attention of the reader to the fact that

a) the terms in their probabilistic sense apply to principles, independent of any practical application;

b) the terms in their statistical sense apply to observations to which they relate: these definitions are of a specifically operational character.

NOTE — The concept of probability may be introduced in either of two forms, depending on whether it is intended to designate a degree of belief or whether it is considered as the limit value of a relative frequency. In both cases, its introduction requires that some precautions be taken which cannot be developed within the context of an International Standard and for which users should refer to specialized literature.

**1.1 probability**: A real number in the scale 0 to 1 attached to a random event.

NOTE — It can be related to a long-run relative frequency of occurrence or to a degree of belief that an event will occur. For a high degree of belief, the probability is near 1.

**1.2 random variable; variate**: A variable that may take any of the values of a specified set of values and with which is associated a *probability distribution* (1.3).

NOTES

1 A random variable that may take only isolated values is said to be "discrete". A random variable which may take any value within a finite or infinite interval is said to be "continuous".

2 The probability of an event A is denoted by $P_r(A)$ or $P(A)$.

**1.3 probability distribution** (of a random variable): A function giving the probability that a random variable takes any given value or belongs to a given set of values.

NOTE — The probability on the whole set of values of the random variable equals 1.

**1.4 distribution function**: A function giving, for every value $x$, the probability that the random variable $X$ be less than or equal to $x$:

$$F(x) = P_r[X < x]$$

# Section 1: Termes utilisés en calcul des probabilités

De nombreux termes figurent à la fois dans cette section et dans la section 2. Il a cependant paru utile de les définir séparément pour attirer l'attention du lecteur sur le fait

a) que les termes probabilistes s'appliquent à des concepts, independamment de toute réalisation, et

b) que les termes statistiques s'appliquent à des observations et aux calculs qui y sont relatifs: ces termes ont un caractère opérationnel que précise la définition.

NOTE — La notion de probabilité peut être introduite sous deux formes, selon qu'on veuille s'en servir pour désigner un degré de croyance, ou qu'on la considère comme la valeur limite d'une fréquence relative. Dans les deux cas, son introduction nécessite certaines précautions qui ne peuvent être développées dans le cadre d'une norme internationale et pour lesquelles il convient de se référer aux ouvrages spécialisés.

**1.1 probabilité**: Nombre réel dans l'intervalle de 0 à 1, associé à un événement aléatoire.

NOTE — Il peut se rapporter à une fréquence relative d'une occurrence dans une longue série ou à un degré de croyance qu'un événement se produira. Pour un haut degré de croyance, la probabilité est proche de 1.

**1.2 variable aléatoire**: Variable pouvant prendre n'importe quelle valeur d'un ensemble déterminé de valeurs, et à laquelle est associée une *loi de probabilité* (1.3).

NOTES

1 Une variable aléatoire qui ne peut prendre que des valeurs isolées est dite «discrète». Une variable aléatoire qui peut prendre toutes valeurs à l'intérieur d'un intervalle fini ou infini est dite «continue».

2 La probabilité d'un événement A est noté $P_r(A)$ ou $P(A)$.

**1.3 loi de probabilité** (d'une variable aléatoire): Fonction déterminant la probabilité qu'une variable aléatoire prenne une valeur donnée quelconque ou appartienne à un ensemble donné de valeurs.

NOTE — La probabilité couvrant l'ensemble des valeurs de la variable est égale à 1.

**1.4 fonction de répartition**: Fonction donnant pour toute valeur $x$, la probabilité que la variable aléatoire $X$ soit inférieure ou égale à $x$:

$$F(x) = P_r[X \leqslant x]$$

**1.5 probability density function** (for a continuous random variable): The derivative (when it exists) of the distribution function:

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$$

NOTE — $f(x)\mathrm{d}x$ is the "probability element":

$$f(x)\mathrm{d}x = P_r[x < X < x + \mathrm{d}x]$$

**1.6 probability mass function**: A function giving, for each value $x_i$ of a discrete random variable $X$, the probability $p_i$ that the random variable equals $x_i$:

$$p_i = P_r[X = x_i]$$

**1.7 bivariate distribution function**: A function giving, for every pair of values $x,y$, the probability that the random variable $X$ be less than or equal to $x$, and the random variable $Y$ be less than or equal to $y$:

$$F(x, y) = P_r[X \leqslant x; Y \leqslant y]$$

**1.8 multivariate distribution function**: A function giving, for every set of values $x,y$, ... the probability that each of the random variables $X, Y$, ... is less than or equal to the corresponding value $x,y$, ...:

$$F(x, y, \ldots) = P_r[X \leqslant x; Y \leqslant y; \ldots]$$

**1.9 marginal probability distribution**: A probability distribution of a subset of $k_1 < k$ random variables from a probability distribution of $k$ random variables, the other $k - k_1$ variables taking any values within their set of values.

EXAMPLE

In a probability distribution with three random variables, $X$, $Y$ and $Z$, there are

— three bivariate marginal probability distributions: the distributions of the pairs $(X,Y)$, $(X,Z)$, $(Y,Z)$;

— three univariate marginal probability distributions: the distributions of $X$, of $Y$ and of $Z$.

**1.10 conditional probability distribution**: A probability distribution of a subset of $k_1 < k$ random variables from a probability distribution of $k$ random variables when the other $(k - k_1)$ variables have fixed values.

EXAMPLE

In a probability distribution with two random variables $X$ and $Y$, there are

— conditional probability distributions of $X$: a specific distribution is expressed as the distribution of $X$ for $Y = y$;

— conditional probability distributions of $Y$: a specific distribution is expressed as the distribution of $Y$ for $X = x$.

**1.5 fonction de densité de probabilité** (pour une variable aléatoire continue): Dérivée (lorsqu'elle existe) de la fonction de répartition:

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$$

NOTE — $f(x)\mathrm{d}x$ s'appelle la «probabilité élémentaire»:

$$f(x)\mathrm{d}x = P_r[x < X < x + \mathrm{d}x]$$

**1.6 fonction de masse**: Fonction donnant, pour chaque valeur $x_i$ d'une variable aléatoire discrète $X$, la probabilité $p_i$ que cette variable aléatoire soit égale à $x_i$:

$$p_i = P_r[X = x_i]$$

**1.7 fonction de répartition à deux variables**: Fonction donnant, pour chaque couple de valeurs $x$, $y$, la probabilité que la variable aléatoire $X$ soit inférieure ou égale à $x$ et que la variable aléatoire $Y$ soit inférieure ou égale à $y$:

$$F(x, y) = P_r[X \leqslant x; Y \leqslant y]$$

**1.8 fonction de répartition à plusieurs variables**: Fonction donnant, pour chaque ensemble de valeurs $x,y$, ... la probabilité que chaque variable aléatoire $X, Y$, ... soit inférieure ou égale à la valeur correspondante $x,y$, ...:



$$F(x, y, \ldots) = P_r[X \leqslant x; Y \leqslant y; \ldots]$$

**1.9 loi de probabilité marginale**: Loi de probabilité d'un sous-ensemble de $k_1 < k$ variables aléatoires d'une loi de probabilité de $k$ variables aléatoires, les $k - k_1$ autres variables pouvant prendre des valeurs quelconques dans leur ensemble de valeurs.

EXEMPLE

Dans une loi de probabilité à trois variables aléatoires, $X$, $Y$ et $Z$, on distingue

— trois lois marginales à deux variables: lois des couples $(X,Y)$, $(X,Z)$, $(Y,Z)$;

— trois lois marginales à une variable: lois de $X$, de $Y$ et de $Z$.

**1.10 loi de probabilité conditionnelle**: Loi de probabilité d'un sous-ensemble de $k_1 < k$ variables aléatoires d'une loi de probabilité de $k$ variables aléatoires lorsque les $(k - k_1)$ variables aléatoires restantes ont des valeurs fixées.

EXEMPLE

Dans une loi de probabilité à deux variables aléatoires $X$ et $Y$, il existe

— les lois de probabilité conditionnelles de $X$: une loi particulière est dite la loi de $X$ pour $Y = y$;

— les lois de probabilité conditionnelles de $Y$: une loi particulière est dite la loi de $Y$ pour $X = x$.

**1.11 independence:** Two random variable $X$ and $Y$ are independent if, and only if, their distribution functions are related by

$$F(x, y) = F(x, \infty)\cdot F(\infty, y) = G(x)\cdot H(y)$$

where $F(x, \infty) = G(x)$ and $F(\infty, y) = H(y)$ are the marginal distribution functions of $X$ and $Y$, respectively for all pairs $(x,y)$.

NOTES

1 For continuous independent random variables, their probability density functions if they exist are related by

$$f(x, y) = g(x)\cdot h(y)$$

where $g(x)$ and $h(y)$ are the marginal density functions of $X$ and $Y$, respectively, for all pairs $(x,y)$.

For discrete independent random variables, their probabilities are related by

$$P_r(X = x_i;\ Y = y_j) = P_r(X = x_i)\cdot P_r(Y = y_j)$$

for each pair $(x_i, y_j)$.

2 Two events are independent if the probability that both occur is equal to the product of the probabilities of the two events.

**1.12 parameter:** A quantity used in describing the probability distribution of a random variable.

**1.13 correlation:** The relationship between two or several random variables within a distribution of two or more random variables.

NOTE — Most statistical measures of correlation measure only the degree of linear relationship.

**1.14 quantile; fractile** (of a random variable or of a probability distribution): The $p$-quantile is the value of the random variable for which the distribution function equals $p$ ($0 \leq p \leq 1$) or "jumps" from a value less than $p$ to a value greater than $p$.

NOTES

1 If the distribution function equals $p$ throughout an interval between two consecutive values of the random variable, then any value in this interval may be considered as the $p$-quantile.

2 $x_p$ is the $p$-quantile if

$$P_r(X < x_p) \leq p \leq P_r(X \leq x_p)$$

3 In the case of a continuous variable, the $p$-quantile is a value of the variable below which the proportion $p$ of the distribution lies.

4 A percentile is defined correspondingly with $p$ expressed as a percentage.

**1.15 median:** The 0,5-quantile.

**1.16 quartile:** The 0,25-quantile or the 0,75-quantile.

**1.17 mode:** The value(s) of a random variable at a local maximum of the probability mass function of a discrete random

**1.11 indépendance:** Deux variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes si et seulement si leurs fonctions de répartition sont reliées par

$$F(x, y) = F(x, \infty)\cdot F(\infty, y) = G(x)\cdot H(y)$$

où $F(x, \infty) = G(x)$ et $F(\infty, y) = H(y)$ sont respectivement les lois de probabilité marginales de $X$ et de $Y$ pour chaque couple $(x,y)$.

NOTES

1 Pour des variables aléatoires indépendantes continues, les fonctions de densité de probabilité, si elles existent, sont reliées par

$$f(x, y) = g(x)\cdot h(y)$$

où $g(x)$ et $h(y)$ sont les fonctions de densité marginales de $X$ et $Y$ respectivement pour chaque couple $(x,y)$.

Pour des variables aléatoires discrètes, les probabilités sont reliées par

$$P_r(X = x_i;\ Y = y_j) = P_r(X = x_i)\cdot P_r(Y = y_j)$$

pour chaque couple $(x_i, y_j)$.

2 Deux événements sont indépendants si la probabilité de leur occurrence conjointe est égale au produit des probabilités des deux événements.

**1.12 paramètre:** Grandeur utilisée pour décrire la loi de probabilité d'une variable aléatoire.



**1.13 corrélation:** Liaison entre deux ou plusieurs variables aléatoires à l'intérieur d'une loi.

NOTE — La plupart des mesures statistiques de corrélation ne mesurent que le degré de liaison linéaire.

**1.14 quantile; fractile** (d'une variable aléatoire ou d'une loi de probabilité): Le fractile d'ordre $p$ est la valeur de la variable aléatoire pour laquelle la fonction de répartition prend la valeur $p$ ($0 \leq p \leq 1$) ou «saute» d'une valeur inférieure à $p$ à une valeur supérieure à $p$.

NOTES

1 Si la fonction de répartition est égale à $p$ sur un intervalle entre deux valeurs consécutives d'une variable aléatoire, alors toute valeur de cet intervalle peut être considérée comme le fractile d'ordre $p$.

2 $x_p$ est le fractile d'ordre $p$ si

$$P_r(X < x_p) \leq p \leq P_r(X \leq x_p)$$

3 Dans le cas d'une variable continue, le fractile d'ordre $p$ est la valeur d'une variable au-dessous de laquelle se trouve la proportion $p$ de la loi.

4 Un percentile est défini de facon analogue en exprimant $p$ en pourcentage.

**1.15 médiane:** Le fractile d'ordre 0,5.

**1.16 quartile:** Le fractile d'ordre 0,25 ou le fractile d'ordre 0,75.

**1.17 mode:** Valeur d'une variable aléatoire à un maximum local d'une fonction de masse d'une variable aléatoire ou à un variable or at a local maximum of the probability density function of a continuous random variable.

NOTE — If there is one mode, the probability distribution of the random variable is said to be "unimodal"; if there is more than one mode the probability distribution is said to be "multimodal" (bimodal if there are two modes).

**1.18 expectation** (of a random variable or of a probability distribution); **expected value; mean**:

(1) For a discrete random variable $X$ taking the values $x_i$ with the probabilities $p_i$, the expectation, if it exists, is

$$\mu = E(X) = \Sigma p_i x_i$$

the sum being extended over all the values $x_i$ which can be taken by $X$.

(2) For a continuous random variable $X$ having the probability density function $f(x)$, the expectation, if it exists, is

$$\mu_x = E(X) = \int x f(x) \mathrm{d}x$$

the integral being extended over the interval(s) of variation of $X$.

**1.19 marginal expectation**: The expectation of a *marginal probability distribution* (1.9) of a random variable.

**1.20 conditional expectation**: The expectation of a *conditional probability distribution* (1.10) of a random variable.

**1.21 centred random variable**: A random variable the expectation of which equals zero.

NOTE — If the random variable $X$ has an expectation equal to $\mu$, the corresponding centred random variable is $X - \mu$.

**1.22 variance** (of a random variable or of a probability distribution): The expectation of the square of the *centred random variable* (1.21):

$$\sigma^2 = V(X) = E\,[X - E(X)]^2$$

**1.23 standard deviation** (of a random variable, or of a probability distribution): The positive square root of the variance

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

**1.24 coefficient of variation** (of a random variable, or of a probability distribution): The ratio of the standard deviation to the expectation of a non-negative random variable:

$$\sqrt{V(X)}/E(X) = \sigma/\mu$$

maximum local d'une fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire continue.

NOTE — S'il y a un seul mode, la loi de probabilité de la variable aléatoire est dite «unimodale»; s'il y a plus d'un mode, la loi de probabilité est dite «multimodale» (bimodale s'il y a deux modes).

**1.18 espérance mathématique** (d'une variable aléatoire ou d'une loi de probabilité); **valeur espérée; moyenne**:

(1) Pour une variable aléatoire discrète $X$ prenant des valeurs $x_i$ avec des probabilités $p_i$, l'espérance mathématique, si elle existe, est

$$\mu = E(X) = \Sigma p_i x_i$$

La somme est étendue à toutes les valeurs de $x_i$ susceptibles d'être prises par $X$.

(2) Pour une variable aléatoire continue $X$, ayant pour fonction de densité de probabilité $f(x)$, l'espérance mathématique, si elle existe, est

$$\mu_x = E(X) = \int x f(x) \mathrm{d}x$$

L'intégrale est étendue au domaine de variation de $X$.

**1.19 espérance mathématique marginale**: Espérance mathématique d'une *loi de probabilité marginale* (1.9) d'une variable aléatoire.

**1.20 espérance mathématique conditionnelle**: Espérance mathématique d'une *loi de probabilité conditionnelle* (1.10) d'une variable aléatoire.

**1.21 variable aléatoire centrée**: Variable aléatoire dont l'espérance mathématique est égale à zéro.

NOTE — Si la variable aléatoire $X$ a pour espérance mathématique $\mu$, la variable aléatoire centrée correspondante est $X - \mu$.

**1.22 variance** (d'une variable aléatoire ou d'une loi de probabilité): Espérance mathématique du carré de la *variable aléatoire centrée* (1.21):

$$\sigma^2 = V(X) = E\,[X - E(X)]^2$$

**1.23 écart-type** (d'une variable aléatoire ou d'une loi de probabilité): Racine carrée positive de la variance:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

**1.24 coefficient de variation** (d'une variable aléatoire ou d'une loi de probabilité): Rapport de l'écart-type à l'espérance mathématique d'une variable aléatoire non négative:

$$\sqrt{V(X)}/E(X) = \sigma/\mu$$

**1.25 standardized random variable:** A random variable the expectation of which equals zero and the standard deviation of which equals 1.

NOTES

1 If the random variable $X$ has an expectation equal to $\mu$ and a standard deviation equal to $\sigma$, the corresponding standardized random variable is the random variable

$(X - \mu)/\sigma$

The distribution of the standardized random variable is called its "standardized distribution".

2 The concept of a standardized random variable can be generalized to that of a "reduced random variable" which is defined using another location and/or another scale parameter instead of expectation and standard deviation.

**1.26 moment[1] of order $q$ about the origin:** In a univariate distribution, the expectation of the $q$th power of the random variable:

$E[X^q]$

NOTE — The moment of order 1 is the *expectation* (1.18) of the random variable $X$.

**1.27 moment[1] of order $q$ about an origin $a$:** In a univariate distribution, the expectation of the $q$th power of the random variable $(X - a)$:

$E[(X - a)^q]$

**1.28 central moment[1] of order $q$:** In a univariate distribution, the expectation of the $q$th power of the centred random variable $[X - \mu_x]$:

$E[(X - \mu_x)^q]$

NOTE — The central moment of order 2 is the *variance* (1.22) of the random variable $X$.

**1.29 joint moment[1] of orders $q$ and $s$ about the origin:** In a bivariate distribution, the expectation of the product of the $q$th power of the random variable $X$ and the $s$th power of the random variable $Y$:

$E[X^q Y^s]$

NOTE — The joint moment of orders 1 and 0 is the *marginal expectation* (1.19) of $X$. The joint moment of orders 0 and 1 is the *marginal expectation* (1.19) of $Y$.

**1.30 joint moment[1] of orders $q$ and $s$ about an origin $a,b$:** In a bivariate distribution, the expectation of the product of the $q$th power of the random variable $(X - a)$ and the $s$th power of the random variable $(Y - b)$:

$E[(X - a)^q (Y - b)^s]$

1) If, in the definition of the moments, the quantities $X$, $X - a$, $Y$, $Y - b$, etc. are replaced by their absolute values, i.e. $|X|$, $|X - a|$, $|Y|$, $|Y - b|$, etc., other moments called "absolute moments" are defined.

**1.25 variable aléatoire centrée réduite:** Variable aléatoire dont l'espérance mathématique est égale à zéro et dont l'écart-type est égal à 1.

NOTES

1 Si la variable aléatoire $X$ a une espérance mathématique égale à $\mu$ et un écart-type égal à $\sigma$, la variable aléatoire centrée réduite correspondante est la variable aléatoire

$(X - \mu)/\sigma$

La loi de la variable aléatoire centrée réduite est appelée «loi réduite».

2 Le concept de variable aléatoire centrée réduite peut être généralisé en utilisant «variable aléatoire réduite» définie en utilisant une autre valeur centrale et/ou un autre paramètre d'échelle à la place de la moyenne et de l'écart-type.

**1.26 moment[1] d'ordre $q$ par rapport à l'origine:** Dans une loi de probabilité à une variable, l'espérance mathématique de la $q$-ième puissance de la variable aléatoire:

$E[X^q]$

NOTE — Le moment d'ordre 1 est l'*espérance mathématique* (1.18) de la variable aléatoire $X$.

**1.27 moment[1] d'ordre $q$ à partir d'une origine $a$:** Dans une loi de probabilité à une variable, l'espérance mathématique de la $q$-ième puissance de la variable aléatoire $(X - a)$:

$E[(X - a)^q]$

**1.28 moment[1] centré d'ordre $q$:** Dans une loi de probabilité à une variable, espérance mathématique de la $q$-ième puissance de la variable aléatoire centrée $[X - \mu_x]$:

$E[(X - \mu_x)^q]$

NOTE — Le moment centré d'ordre 2 est la *variance* (1.22) de la variable aléatoire $X$.

**1.29 moment[1] d'ordres $q$ et $s$ à partir de l'origine:** Dans une loi de probabilité à deux variables, espérance mathématique du produit de la $q$-ième puissance de la variable aléatoire $x$ et de la $s$-ième puissance de la variable aléatoire $Y$:

$E[X^q Y^s]$

NOTE — Le moment d'ordres 1 et 0 est l'*espérance mathématique marginale* (1.19) de $X$. Le moment d'ordres 0 et 1 est l'*espérance mathématique marginale* (1.19) de $Y$.

**1.30 moment[1] d'ordres $q$ et $s$ à partir d'une origine$(a,b)$:** Dans une loi de probabilité à deux variables, l'espérance mathématique du produit de la $q$-ième puissance de la variable aléatoire $(X - a)$ et de la $s$-ième puissance de la variable aléatoire $(Y - b)$:

$E[(X - a)^q (Y - b)^s]$

1) Si dans la définition des moments, les grandeurs $X$, $X - a$, $Y$, $Y - b$, etc. sont remplacées par leurs valeurs absolues, c'est-à-dire $|X|$, $|X - a|$, $|Y|$, $|Y - b|$, etc., on définit d'autres moments appelés «moments absolus».

**1.31 joint central moment**[1)] **of orders** $q$ **and** $s$: In a bivariate distribution, the expectation of the product of the $q$th power of the centred random variable $(X - \mu_x)$ and the $s$th power of the centred random variable $(Y - \mu_y)$:

$$E[(X - \mu_x)^q (Y - \mu_y)^s]$$

NOTE — The joint central moment of orders 2 and 0 is the variance of the *marginal probability distribution* (1.9) of $X$. The joint central moment of orders 0 and 2 is the variance of the *marginal probability distribution* (1.9) of $Y$.

**1.32 covariance**: The joint central moment of orders 1 and 1:

$$E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$$

**1.33 correlation coefficient**: The ratio of the covariance of two random variables to the product of their standard deviations:

$$\varrho = \frac{E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]}{\sigma_x \sigma_y}$$

NOTES

1 Its value will always lie between −1 and +1 inclusive.

2 If two random variables are independent, the correlation coefficient is zero. The reverse is true only in the case of a *bivariate normal distribution* (1.53).

**1.34 regression curve**: In the case of two random variables, the curve giving for every $x$ the conditional expectation of $Y$ for $X = x$. This curve is called the "regression curve of $Y$ on $X$".

NOTE — When the regression curve of $Y$ on $X$ is a straight line, the regression is called "simple linear".

In this case, the coefficient of linear regression of $Y$ on $X$ is the coefficient of $x$ (slope) in the equation of the regression line.

**1.35 regression surface**: In the case of three random variables $X$, $Y$, $Z$, where $Z$ is influenced by $X$ and $Y$, the surface giving for every pair $(x,y)$ the conditional expectation of $Z$ for $X = x$ and $Y = y$. This surface is called "the regression surface of $Z$ on $X$ and $Y$".

NOTES

1 When the regression surface is a plane, the regression is called "linear". In this case the coefficient of linear regression of $Z$ on $X$ is the coefficient of $x$ in the equation of the regression plane surface.

2 The above definition may be extended to more than three random variables.

**1.36 uniform distribution; rectangular distribution**:

(1) The probability distribution of a continuous random variable, the probability density function of which is constant within a finite interval $[a,b]$ and zero outside this interval.

1) If, in the definition of the moments, the quantities $X$, $X - a$, $Y$, $Y - b$, etc. are replaced by their absolute values, i.e. $|X|$, $|X - a|$, $|Y|$, $|Y - b|$, etc., other moments called "absolute moments" are defined.

**1.31 moment**[1)] **centré d'ordres** $q$ **et** $s$: Dans une loi de probabilité à deux variables, l'espérance mathématique du produit de la $q$-ième puissance de la variable aléatoire centrée $(X - \mu_x)$ et de la $s$-ième puissance de la variable aléatoire centrée $(Y - \mu_y)$:

$$E[(X - \mu_x)^q (Y - \mu_y)^s]$$

NOTE — Le moment centré d'ordres 2 et 0 est la variance de la *loi de probabilité marginale* (1.9) de $X$. Le moment centré d'ordres 0 et 2 est la variance de la *loi de probabilité marginale* (1.9) de $Y$.

**1.32 covariance**: Moment centré d'ordres 1 et 1:

$$E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$$

**1.33 coefficient de corrélation**: Rapport de la covariance de deux variables aléatoires au produit de leurs écarts-types:

$$\varrho = \frac{E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]}{\sigma_x \sigma_y}$$

NOTES

1 Sa valeur se trouve toujours comprise entre −1 et +1 inclus.

2 Si deux variables aléatoires sont indépendantes, le coefficient de corrélation est 0. L'inverse n'est vrai que dans le cas de *loi normale à deux variables* (1.53).



**1.34 courbe de régression**: Dans le cas de deux variables aléatoires, la courbe donnant pour chaque $x$ l'espérance mathématique conditionnelle de $Y$ pour $X = x$. Cette courbe est appelée «courbe de régression de $Y$ en $X$».

NOTE — Quand la courbe de régression de $Y$ en $X$ est une droite, la régression est dite «linéaire».

Dans ce cas, le coefficient de régression linéaire de $Y$ en $X$ est le coefficient de $x$ (pente) dans l'équation de la droite de régression.

**1.35 surface de régression**: Dans le cas de trois variables aléatoires $X$, $Y$, $Z$ où $Z$ est influencé par $X$ et $Y$, la surface donnant pour chaque couple $(x,y)$ l'espérance mathématique conditionnelle de $Z$ pour $X = x$ et $Y = y$. Cette surface est appelée «surface de régression de $Z$ en $X$ et $Y$».

NOTES

1 Quand la surface de régression est un plan, la régression est dite «linéaire». Dans ce cas, le coefficient de régression linéaire de $Z$ en $X$ est le coefficient de $x$ dans l'équation du plan de régression.

2 La définition ci-dessus peut être étendue à plus de trois variables aléatoires.

**1.36 loi uniforme; loi rectangulaire**:

(1) Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue, dont la densité de probabilité est constante dans un intervalle fini $[a, b]$ et nulle hors de cet intervalle.

1) Si dans la définition des moments, les grandeurs $X$, $X - a$, $Y$, $Y - b$, etc. sont remplacées par leurs valeurs absolues, c'est-à-dire $|X|$, $|X - a|$, $|Y|$, $|Y - b|$, etc., on définit d'autres moments appelés «moments absolus».

(2) The probability distribution of a discrete random variable such that

$$P_r(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

for $i = 1, 2, \ldots, n$

NOTE — A discrete uniform distribution has equal probability at each of its $n$ values, e.g.

$$P_{rj} = 1/n$$

for $j = 1, 2, \ldots, n$

**1.37 normal distribution; Laplace-Gauss distribution:** The probability distribution of a continuous random variable $X$, the probability density function of which is

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

for $-\infty < x < +\infty$

NOTE — $\mu$ is the expectation and $\sigma$ is the standard deviation of the normal distribution.

**1.38 standardized normal distribution; standardized Laplace-Gauss distribution:** The probability distribution of the standardized normal random variable $U$, the probability density function of which is

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

for $-\infty < u < +\infty$

(See 1.25, note 1.)

**1.39 chi-squared distribution; $\chi^2$ distribution:** The probability distribution of a continuous random variable that can take any value from 0 to $+\infty$, the probability density function of which is

$$f(\chi^2;\nu) = \frac{(\chi^2)^{(\nu/2)-1}}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right)$$

where

$\chi^2 \geqslant 0$ with parameter $\nu = 1, 2, \ldots$ ;

$\Gamma$ is the gamma function, defined in 1.44.

NOTES

1 The sum of the squares of $\nu$ independent standardized normal variables is a $\chi^2$ random variable with parameter $\nu$; $\nu$ is then called *degrees of freedom* (2.85).

2 The probability distribution of the random variable $\chi^2/2$ is a *gamma distribution* (1.44) with parameter $m = \nu/2$.

(2) Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète telle que

$$P_r(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$

NOTE — Une loi uniforme discrète a une probabilité égale en chacune de ses $n$ valeurs, par exemple

$$P_{rj} = 1/n$$

pour $j = 1, 2, \ldots, n$

**1.37 loi normale; loi de Laplace-Gauss:** Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue $X$ dont la densité de probabilité est

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

pour $-\infty < x < +\infty$

NOTE — $\mu$ est l'espérance mathématique et $\sigma$ l'écart-type de la loi normale.

**1.38 loi normale réduite; loi de Laplace-Gauss réduite:** Loi de probabilité de la variable aléatoire normale réduite $U$ dont la densité de probabilité est

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

pour $-\infty < u < +\infty$

(Voir 1.25, note 1.)

**1.39 loi de chi carré; loi de $\chi^2$:** Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue qui peut prendre toute valeur entre 0 et $+\infty$ et dont la densité de probabilité est

$$f(\chi^2;\nu) = \frac{(\chi^2)^{(\nu/2)-1}}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right)$$

où

$\chi^2 \geqslant 0$ de paramètre $\nu = 1, 2, \ldots$ ;

$\Gamma$ est la fonction gamma définie en 1.44.

NOTES

1 La somme des carrés de $\nu$ variables aléatoires centrées réduites indépendantes est un $\chi^2$ de paramètre $\nu$; $\nu$ est appelé alors *degrés de liberté* (2.85).

2 La loi de probabilité de la variable aléatoire $\chi^2/2$ est une *loi gamma* (1.44) de paramètre $m = \nu/2$.

**1.40** ***t*-distribution; Student's distribution:** The probability distribution of a continuous random variable, the probability density function of which is

$$f(t;\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}\left(\frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\Gamma(\nu/2)}\right)\left(\frac{1}{(1+t^2/\nu)^{(\nu+1)/2}}\right)$$

where

$-\infty < t < +\infty$ with parameter $\nu = 1, 2, \ldots$ ;

$\Gamma$ is the gamma function, defined in 1.44.

NOTE — The quotient of two independent random variables, the numerator of which is a standardized normal variable, and the denominator of which is the positive square root of the quotient of a $\chi^2$ random variable and its number of degrees of freedom $\nu$, is a Student's distribution with $\nu$ degrees of freedom.

**1.41** ***F*-distribution:** The probability distribution of a continuous random variable, which can take any value from 0 to $+\infty$, the probability density function of which is

$$f(F;\nu_1,\nu_2) = \frac{\Gamma[(\nu_1+\nu_2)/2]}{\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)}(\nu_1)^{\nu_1/2}(\nu_2)^{\nu_2/2}\frac{F^{(\nu_1/2)-1}}{(\nu_1F+\nu_2)^{(\nu_1+\nu_2)/2}}$$

where

$F > 0$ with parameters $\nu_1, \nu_2 = 1, 2, \ldots$;

$\Gamma$ is the gamma function, defined in 1.44.

NOTE — This is the distribution of the quotient of two independent $\chi^2$ distributed random variables, each one divided by its number of degrees of freedom. The numbers of degrees of freedom of the $\chi^2$ random variables of the numerator $\nu_1$ and of the denominator $\nu_2$ are, in this order, the numbers of degrees of freedom of the $F$-distributed random variable.

**1.42** **log-normal distribution:** The probability distribution of a continuous random variable $X$ that can take any value from $a$ to $+\infty$, the probability density function of which is

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\log_e(x-a)-\mu}{\sigma}\right]^2\right\}$$

where

$x > a$;

$\mu$ and $\sigma$ are respectively the mean and the standard deviation of $\log_e(X-a)$.

NOTES

1 The probability distribution of the random variable $\log_e(X-a)$ is a normal distribution; $\mu$ and $\sigma$ are, respectively, the expectation and the standard deviation of this random variable.

2 The parameters $\mu$ and $\sigma$ are not the logarithms of the mean and of the standard deviation of $X$.

**1.40** **loi de *t*; loi de Student:** Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité est

$$f(t;\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}\left(\frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\Gamma(\nu/2)}\right)\left(\frac{1}{(1+t^2/\nu)^{(\nu+1)/2}}\right)$$

où

$-\infty < t < +\infty$ de paramètre $\nu = 1, 2, \ldots$ ;

$\Gamma$ est la fonction gamma définie en 1.44.

NOTE — Le quotient de deux variables indépendantes dont le numérateur est une variable normale réduite et dont le dénominateur est la racine carrée positive du quotient d'une variable $\chi^2$ et de ses degrés de liberté $\nu$, est une loi de Student avec $\nu$ degrés de liberté.

**1.41** **loi de *F*:** Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue qui peut prendre toute valeur entre 0 et $\infty$ et dont la densité de probabilité est

$$f(F;\nu_1,\nu_2) = \frac{\Gamma[(\nu_1+\nu_2)/2]}{\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)}(\nu_1)^{\nu_1/2}(\nu_2)^{\nu_2/2}\frac{F^{(\nu_1/2)-1}}{(\nu_1F+\nu_2)^{(\nu_1+\nu_2)/2}}$$

où

$F \geqslant 0$ de paramètres $\nu_1, \nu_2 = 1, 2, \ldots$;

$\Gamma$ est la fonction gamma définie en 1.44.

NOTE — Il s'agit de la loi du quotient de deux variables aléatoires $\chi^2$ indépendantes, chacune divisée par son nombre de degrés de liberté. Le nombre de degrés de liberté des variables aléatoires $\chi^2$, du numérateur $\nu_1$ et du dénominateur $\nu_2$ sont dans cet ordre les nombres de degrés de liberté de la variable aléatoire $F$.

**1.42** **loi log-normale:** Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue $X$ qui peut prendre toute valeur entre $a$ et $+\infty$ et dont la densité de probabilité est

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\log_e(x-a)-\mu}{\sigma}\right]^2\right\}$$

où

$x > a$;

$\mu$ et $\sigma$ sont respectivement la moyenne et l'écart-type de $\log_e(X-a)$.

NOTES

1 La loi de probabilité de la variable aléatoire $\log_e(X-a)$ est une loi normale; $\mu$ et $\sigma$ sont respectivement l'espérance mathématique et l'écart-type de cette variable aléatoire.

2 Les paramètres $\mu$ et $\sigma$ ne sont pas des logarithmes de la moyenne et de l'écart-type de $X$.